



# **Reliability-based Design**

Methoden zur numerisch effizienten  
Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit

**Martin Liebscher**

Wolfgang Graf

Stephan Pannier

## 1 Einführung

deterministischer Entwurf / Optimierung

Reliability-based Design Optimization (RBDO)  
(Zuverlässigkeitsorientierter Entwurf)

## 2 Stochastische Simulation

Direkte Monte-Carlo Simulation

Ausgewählte varianzmindernde Verfahren

## Problemstellung

- Entwurfsgrößen  $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- Zielfunktion  $q(\underline{x})$  (z. B. Gesamtmasse, Verformung, ...)
- Menge der Randbedingungen  $C$   
mit  $c(\underline{x}) \in C$  und  $c(\underline{x}) > 0 \forall c \in C$

## Entwurfsziel / Optimierungsproblem

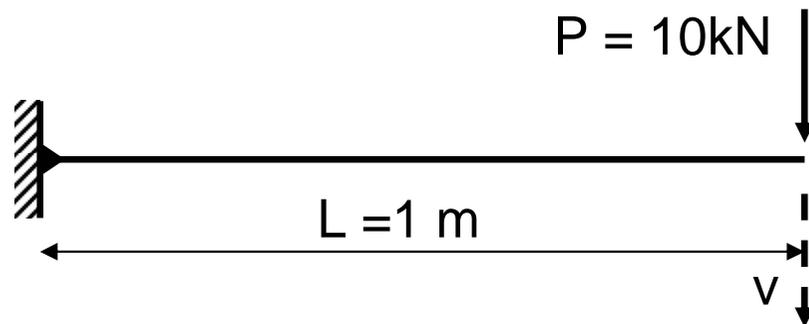
$$\min[q(\underline{x})] \mid c(\underline{x}) > 0$$

# Deterministischer Entwurf / Optimierung

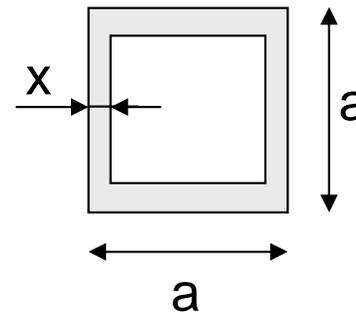
TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Einführendes Beispiel – Kragarm mit Einzellast

System



Querschnitt



$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$I(x) = \frac{a^4 - (a - 2x)^4}{12}$$

$$v(x) = \frac{Pl^3}{3EI(x)}$$

$$a = 0,1 \text{ m}$$

**Entwurfsziel:**

*minimale Querschnittsfläche*

$$\min[q(x)] = \min[a^2 - (a - 2x)^2]$$

**Nebenbedingungen:**

*Mindestblechdicke*

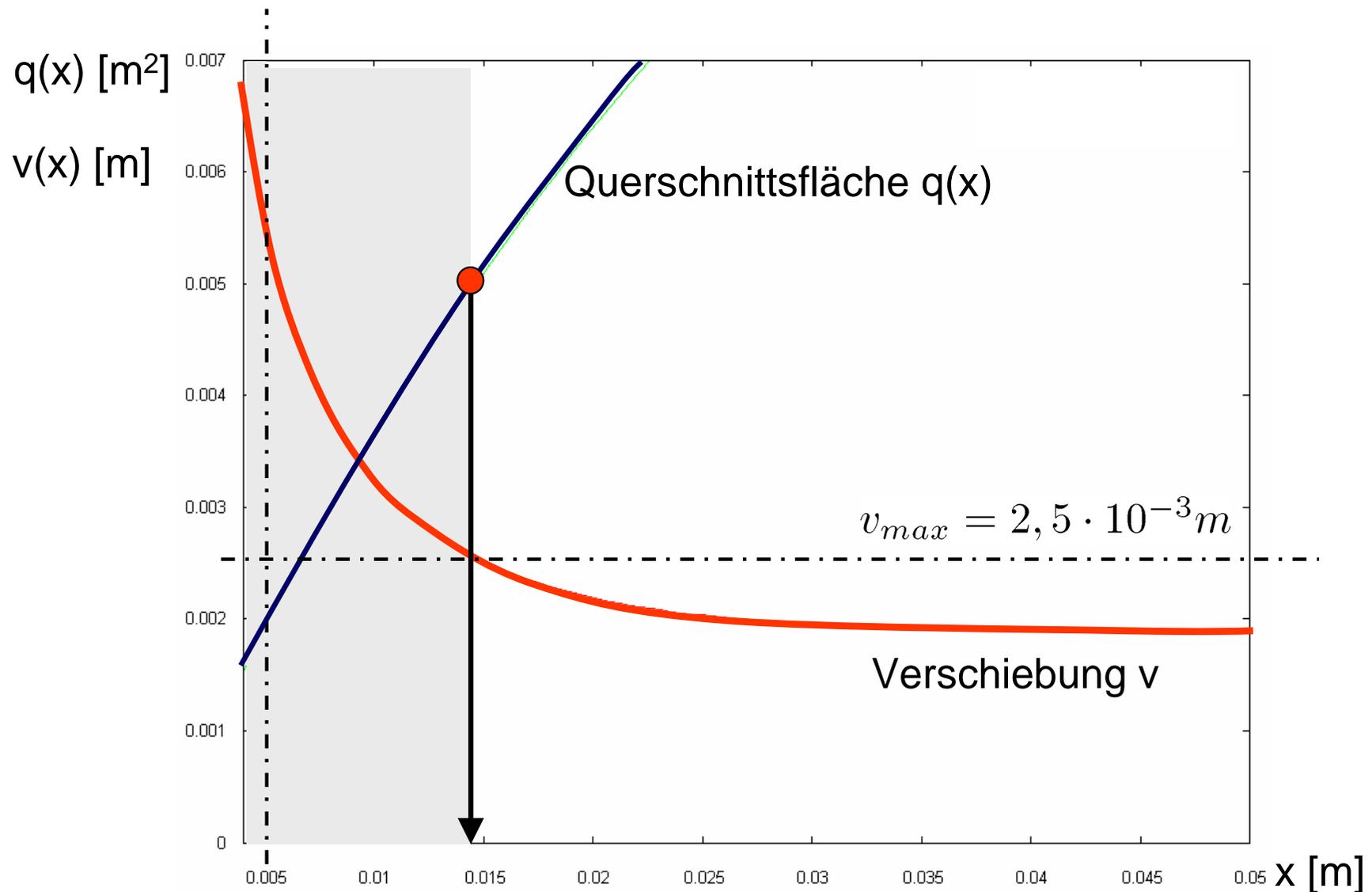
$$c_1(x) = x - t_{min} > 0 \quad t_{min} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

*Maximalverschiebung*

$$c_2(x) = v(x) - v_{max} > 0 \quad v_{max} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

# Deterministischer Entwurf / Optimierung

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke



$$t_{min} = 5 \cdot 10^{-3} m \quad x^* = 0.0147 m$$

# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Problemstellung

Tragwerksparameter  $\underline{t}$  und / oder Entwurfsparameter  $\underline{x}$  sind zufälligen Schwankungen unterworfen (Zufallsgrößen  $\underline{X}$ ,  $\underline{T}$ )

## Entwurfsziel / Optimierungsproblem

Tragwerksentwurf soll Anforderungen (Nebenbedingungen) *zuverlässig* erfüllen

## Bewertung der Zuverlässigkeit eines Entwurfes mit der Versagenswahrscheinlichkeit $P_f$

Versagen: Tragwerksentwurf erfüllt nicht Anforderungen

$P_f$  : Wahrscheinlichkeit mit der Versagen eintritt

# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Sicherheitsabstand: Maß der Zuverlässigkeit

$$d_s = P_t - P_f$$

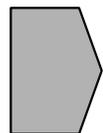
Sicherheits-  
abstand /  
Zuverlässigkeit

angestrebte  
Versagens-  
wahrscheinlichkeit

tatsächliche  
Versagens-  
wahrscheinlichkeit

### Entwurfsziel / Optimierung I

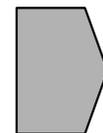
$$\max[d_s(\underline{x})] \mid c(\underline{x}) > 0$$



Zuverlässigkeit ist  
primäres Entwurfsziel

### Entwurfsziel / Optimierung II

$$\min[q(\underline{x})] \mid d_s, c(\underline{x}) > 0$$



Zuverlässigkeit ist  
Nebenbedingung

# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

mögliche Szenarien

	Entwurfsparameter	Tragwerkparameter
<b>A</b>	$\underline{x}$	$\underline{T}$
<b>B</b>	$\underline{X}$	$\underline{t}$
<b>C</b>	$\underline{X}$	$\underline{T}$

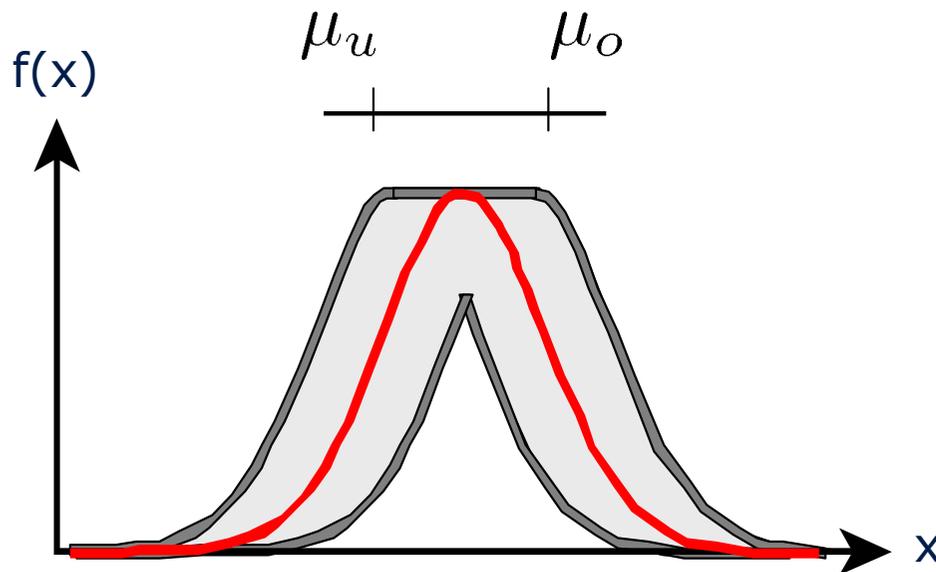
# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

Modellierung zufälliger Entwurfparameter / Tragwerksparameter mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen  $f(\underline{x})$

**Beispiel: Normalverteilung**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



Basisvariable der Optimierung sind Verteilungsparameter  $\mu, \sigma$

Vorgabe eines Intervalls

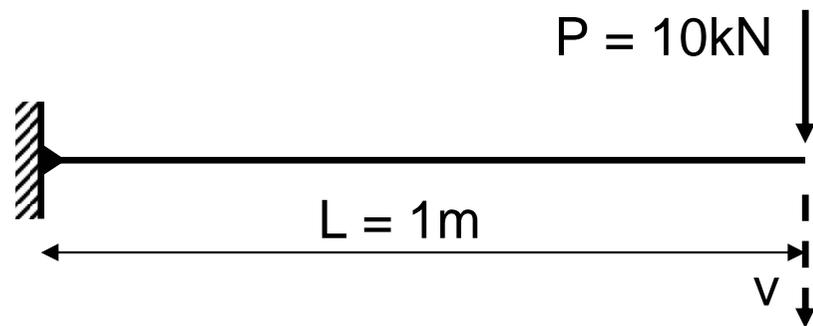
Ergebnis der RBDO:  $\mu^*, \sigma^*$

# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

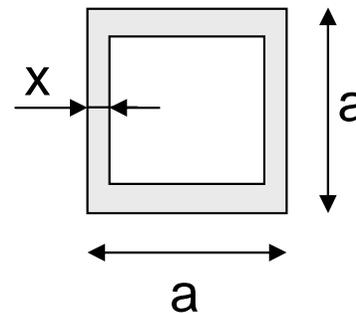
TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Beispiel – zufälliger Entwurfparameter

System



Querschnitt



Entwurfparameter x unterliegt zufälligen Einflüssen

**Annahme:** x normalverteilt

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

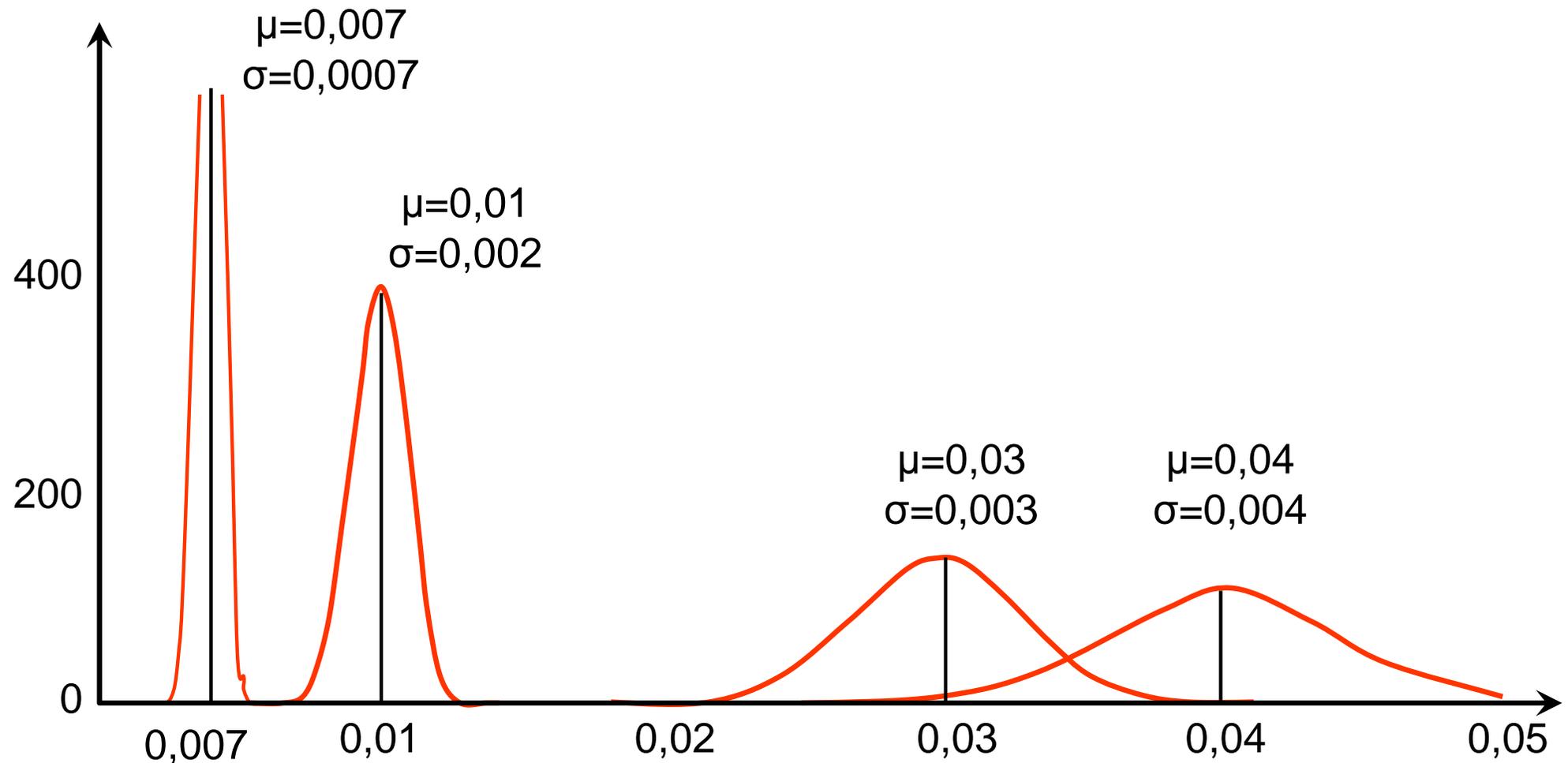
**Basisvariable der RBDO:**

$$\mu = [0,007; 0,04] \quad \text{mit} \quad \sigma = 0.1 \cdot \mu$$

# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

Mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen  $f(x, \mu, \sigma)$



# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

**Entwurfsziel:** Minimierung der Querschnittsfläche (Typ II)

$$\min[\overline{q(\mathbf{X})}] \quad | \quad d_s, c_1 > 0$$

$$\overline{q(\mathbf{X})} = \sum_i^n a^2 - (a - 2x_i^2)$$

**Zuverlässigkeit:**  $d_s = P_t - P(x \mid c_2(x) \geq 0)$

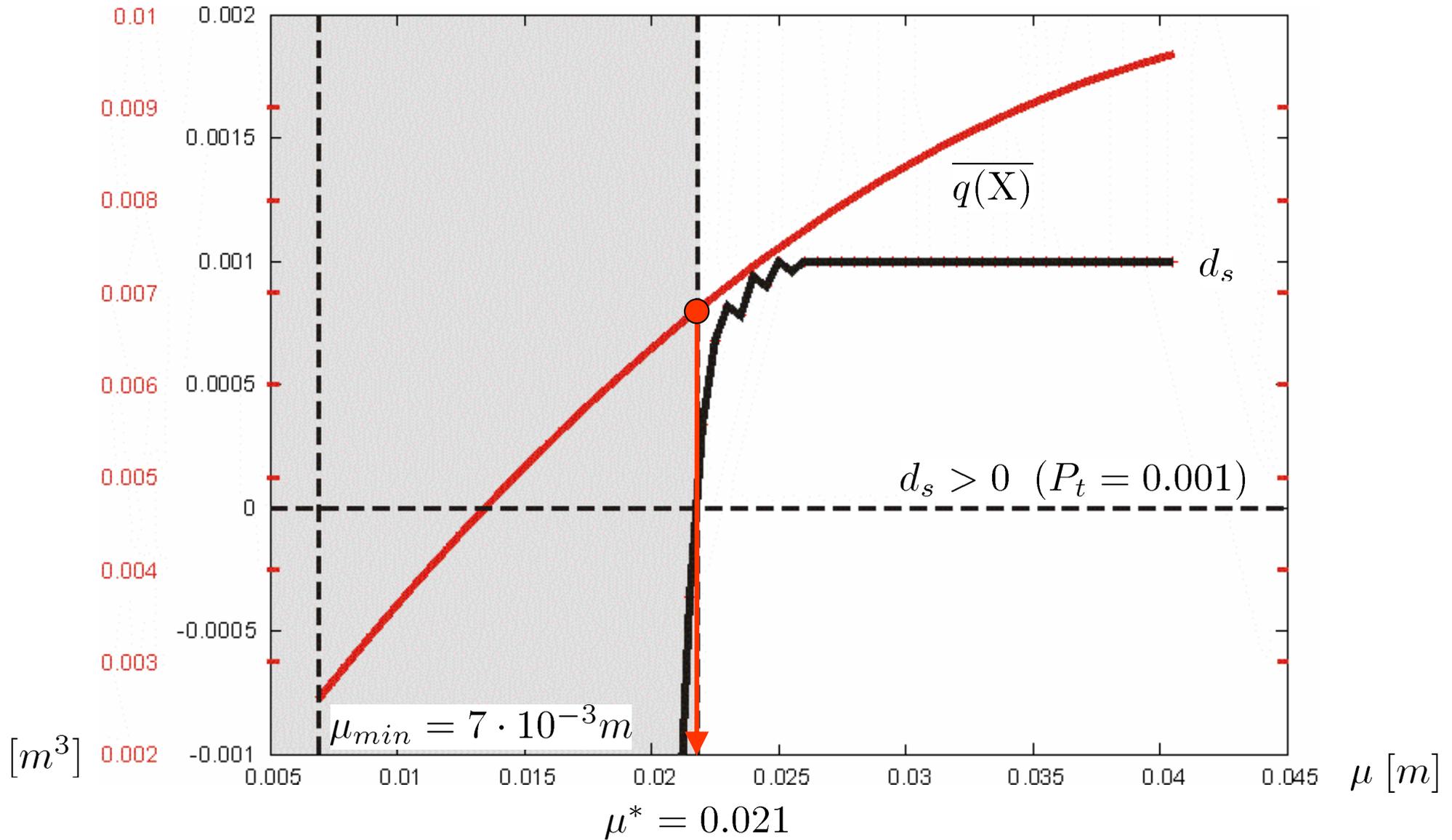
$$c_2(x) = v(x) - v_{max} > 0$$

$$P_t = 0,001$$

**Nebenbedingungen:**  $c_1(\mu) = \mu - \mu_{min} > 0$  (Mindestblechdicke, Mindestmittelwert der normalverteilten Größe x)  
 $\mu_{min} = 0.007$

# Reliability-based Design Optimization (RBDO)

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke



# Gliederung

## 1 Einführung

deterministischer Entwurf / Optimierung

Reliability-based Design Optimization (RBDO)  
(Zuverlässigkeitsorientierter Entwurf)

## 2 Stochastische Simulation

direkte Monte-Carlo Simulation

Ausgewählte varianzmindernde Verfahren

# Stochastic Simulation

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Determination Probability of Failure

Limit state function / surface

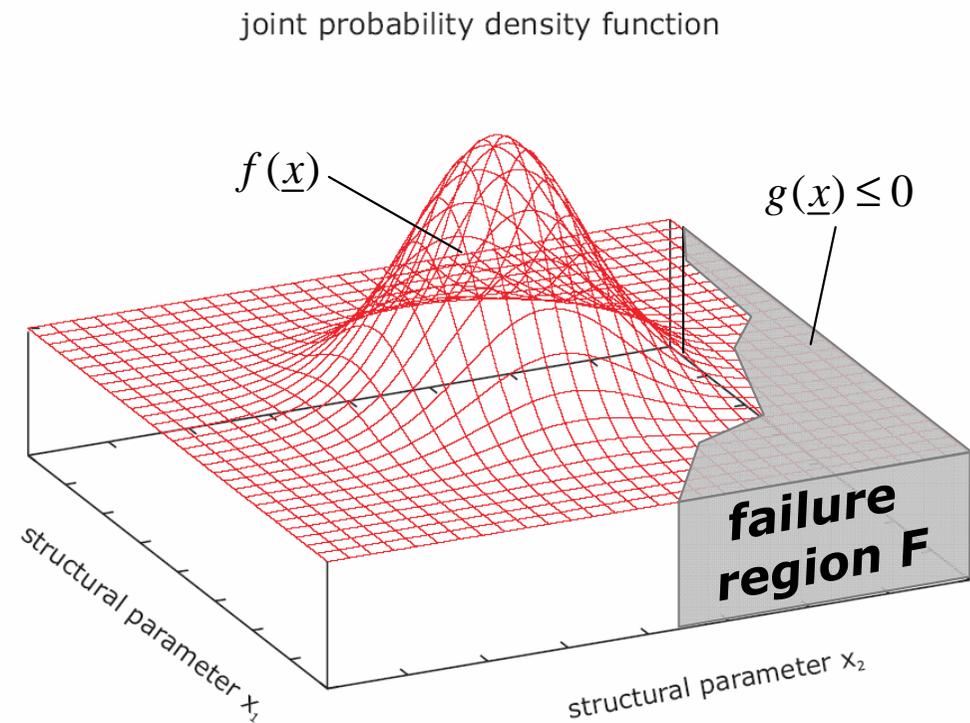
$$g(\underline{x}) = \begin{cases} \leq 0 & \text{failure} \\ > 0 & \text{no failure} \end{cases}$$

Failure probability

$$P_F = \int_{\underline{x} | g(\underline{x}) \leq 0} f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Analysis

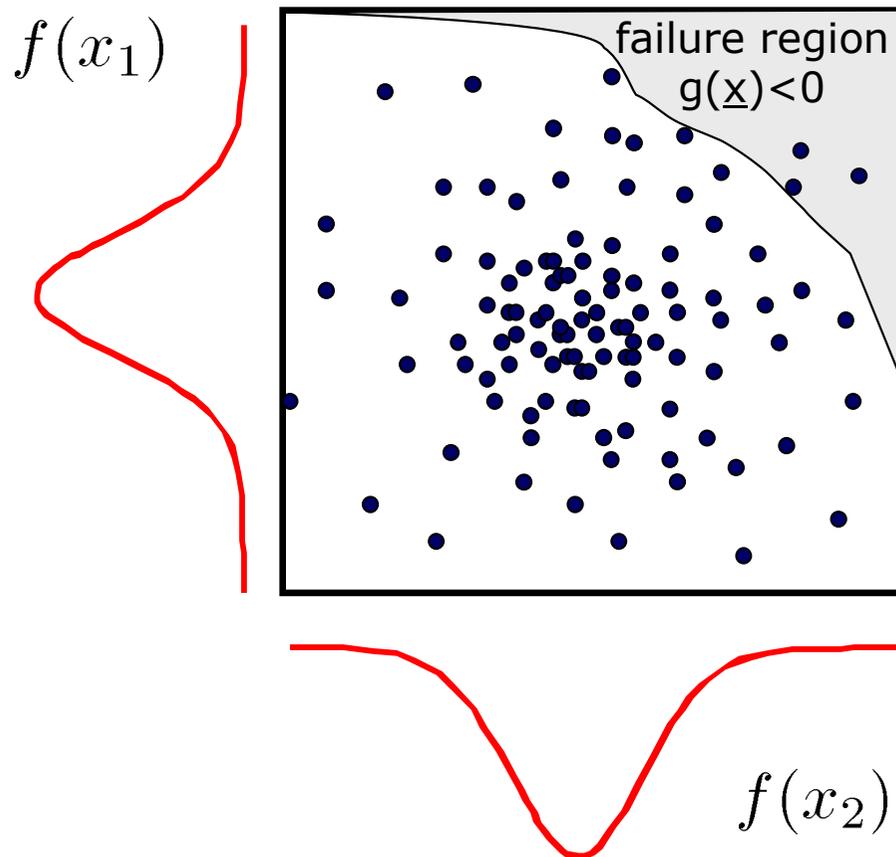
- analytical (restricted)
- simulation method, e.g. Monte Carlo simulation (universal)



# Direct Monte Carlo Simulation

## Numerical integration

$$P_F = \int_{\underline{x} | g(\underline{x}) \leq 0} f(\underline{x}) d\underline{x}$$



## Indicator function

$$I_F(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \underline{x} \in F \\ 0 & \text{if } \underline{x} \notin F \end{cases}$$

$$E(I_F(\underline{x})) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_F(\underline{x}_k)$$

## Estimator of failure probability

$$\widehat{P}_F = \widehat{E}(I_F(\underline{x})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_F(\underline{x}_k)$$

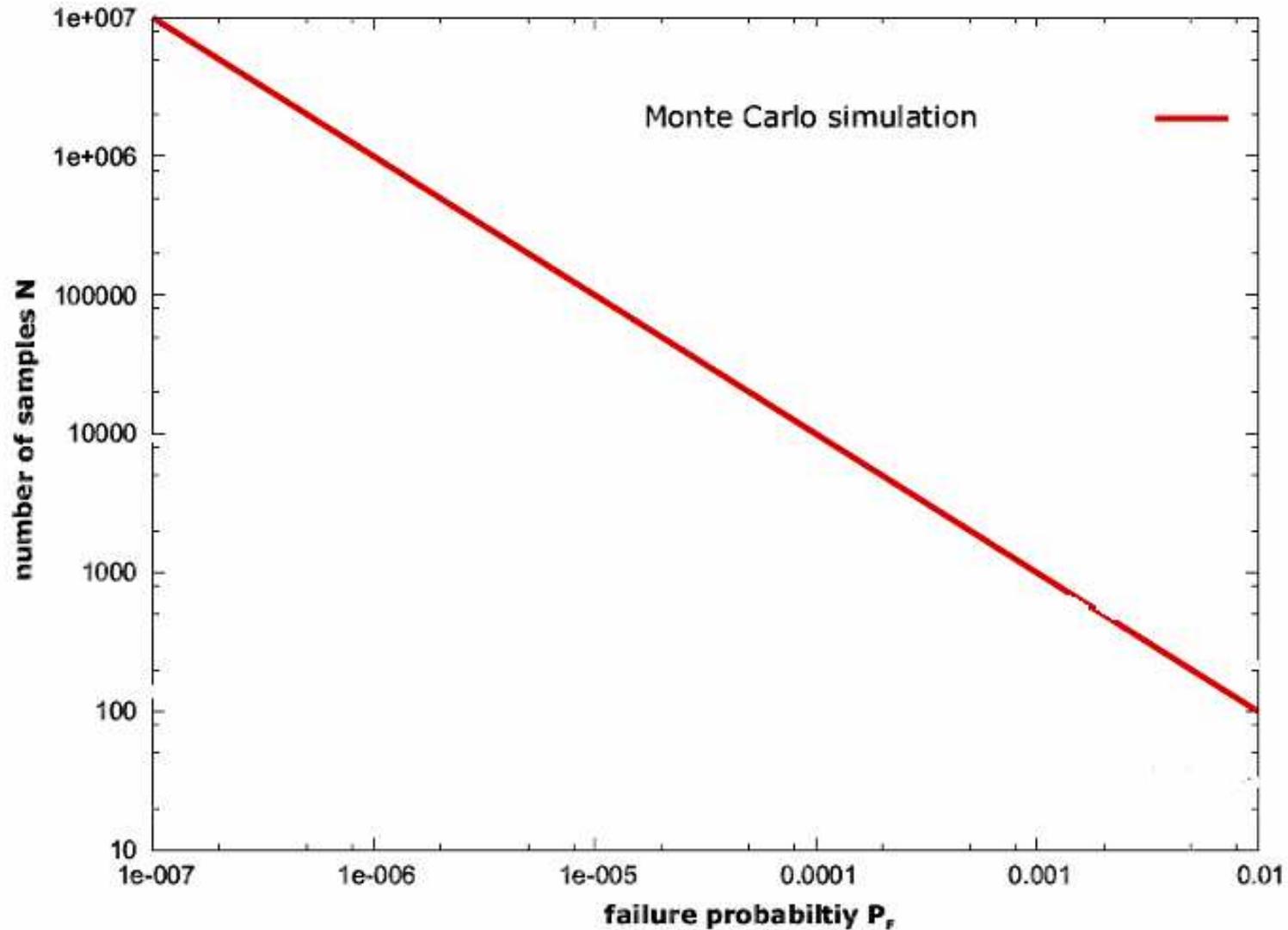
## Number of sample size

$$N_{required} = \frac{1 - P_F}{\delta_{P_F}^2 \cdot P_F}$$

# Direct Monte Carlo Simulation

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

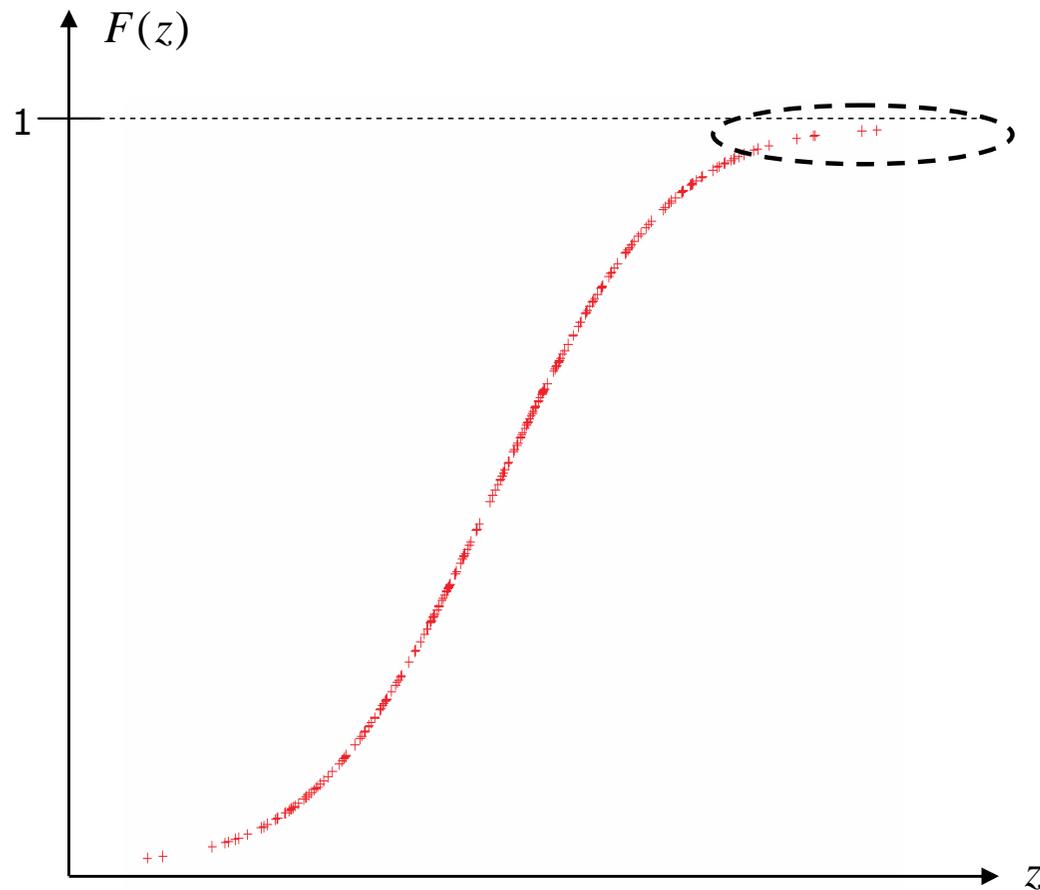
## Numerical effort



# Direct Monte Carlo Simulation

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

Numerical effort



# Stochastic Simulation

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Variance Reducing Methods

### Sampling schemes

- Importance Sampling
- Line Sampling
- Latin Hypercube Sampling
- Subset Sampling ( $P_f < 10^3$ )
- ...

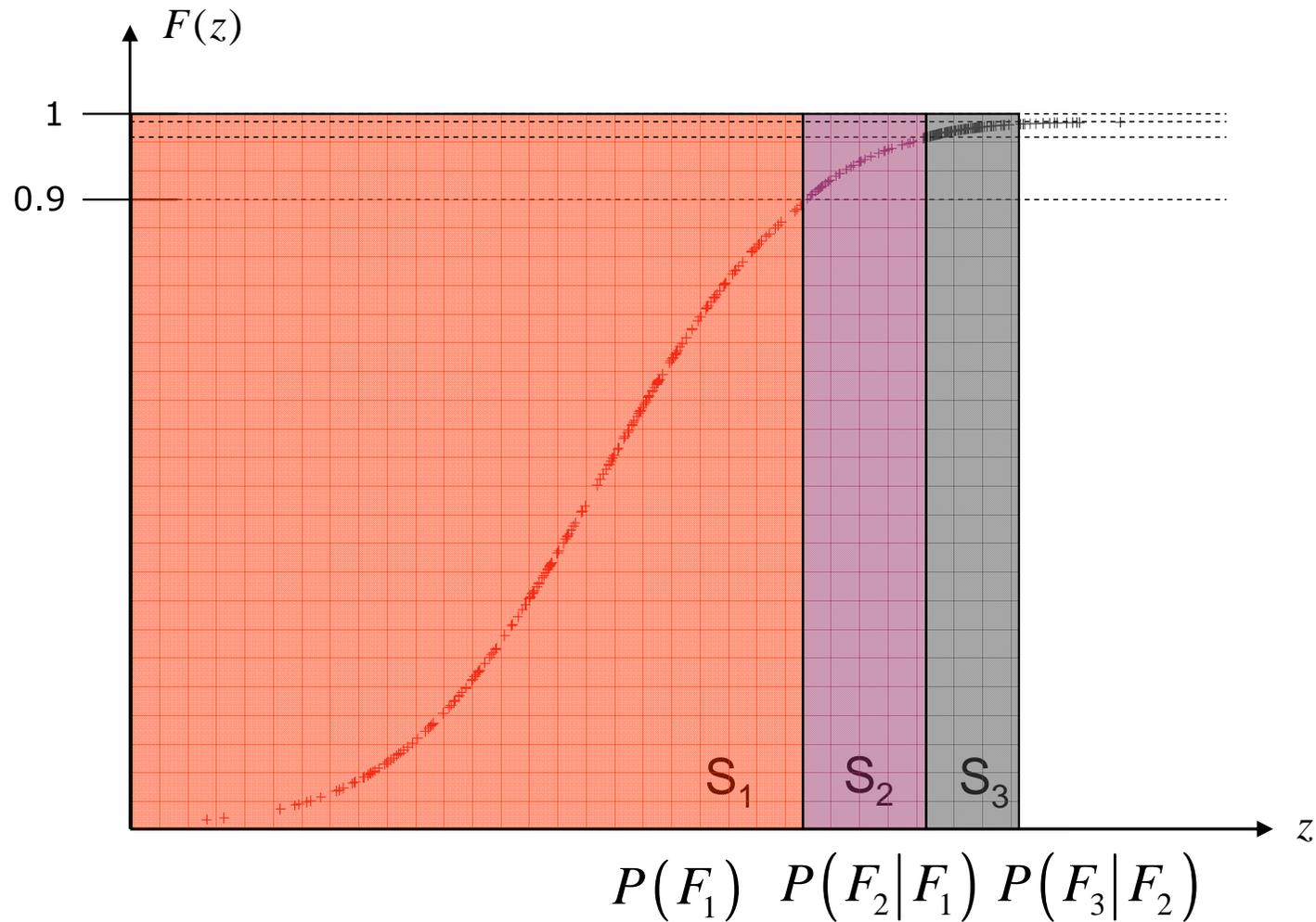
### Meta Model based methodologies

- Response Surface Methodologies (RSM, polynomial)
- Neural Networks (NN)
- ...

# Subset Sampling

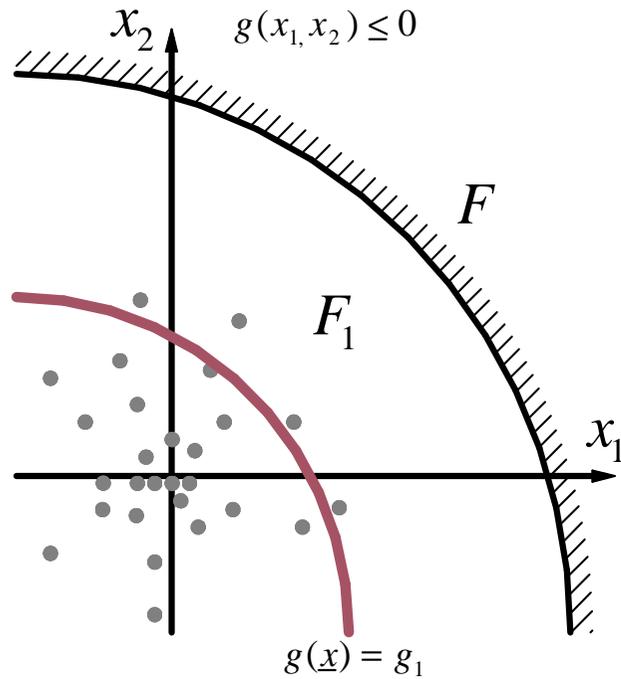
TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Concept of subset sampling



# Subset Sampling

## Subset sampling

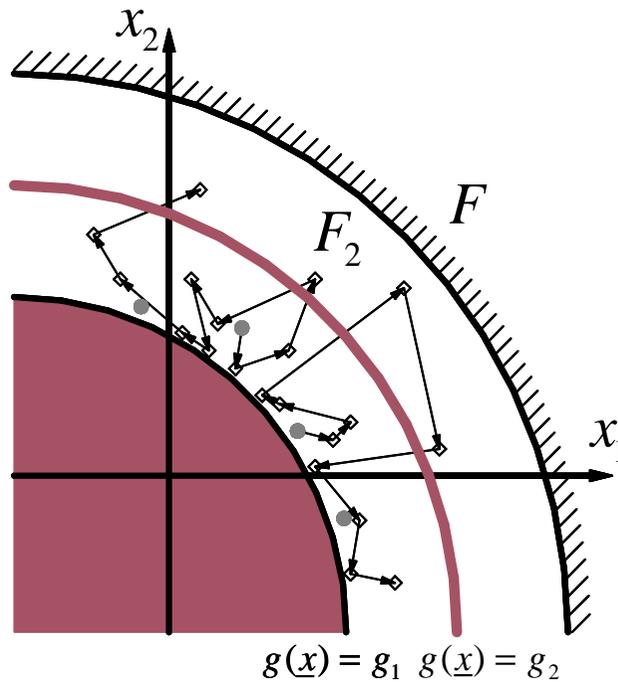


Step 1

simulation  $\{\underline{x}_k^{(1)}\}_{k=1}^{N_1} \sim f(\underline{x})$

$$g_1 \text{ from } P_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} I_{F_1}(\underline{x}_k^{(1)})$$

$$F_1 = \{\underline{x} : g(\underline{x}) \leq g_1\}$$

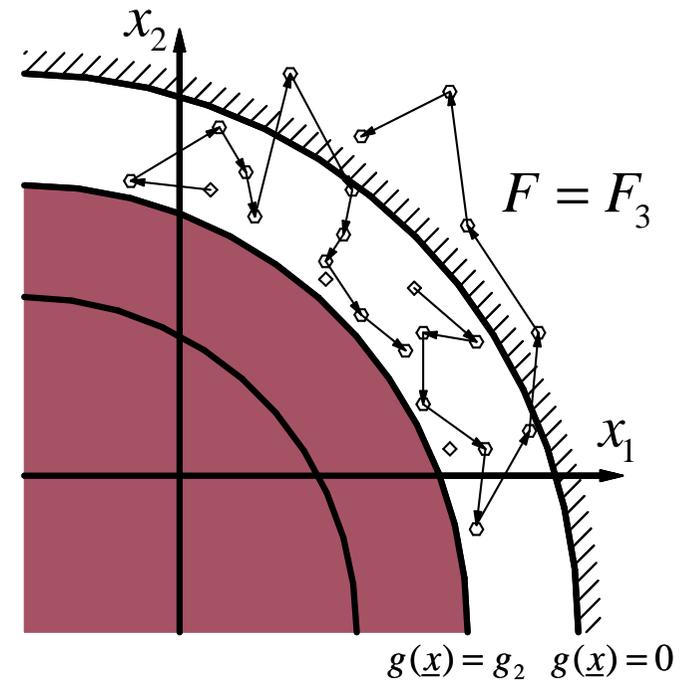


Step 2

simulation  $\{\underline{x}_k^{(2)}\}_{k=1}^{N_2} \sim f(\underline{x} | F_1)$

$$g_2 \text{ from } P_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} I_{F_2}(\underline{x}_k^{(2)})$$

$$F_2 = \{\underline{x} : g(\underline{x}) \leq g_2\}$$



Step 3

simulation  $\{\underline{x}_k^{(3)}\}_{k=1}^{N_3} \sim f(\underline{x} | F_2)$

$$P_3 = \frac{1}{N_3} \sum_{k=1}^{N_3} I_{F_3}(\underline{x}_k^{(3)})$$

$$P_F = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

# Subset Sampling

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

Numerical efficiency

$$N_T \approx m \cdot N = |\log P_F|^r \times \frac{(1 + \gamma)(1 - p_0)}{p_0 |\log p_0|^r \delta^2}$$

Coarse approximation of sample size

subset sampling simulation

$$N \approx 10 \cdot |\log P_F|^r$$

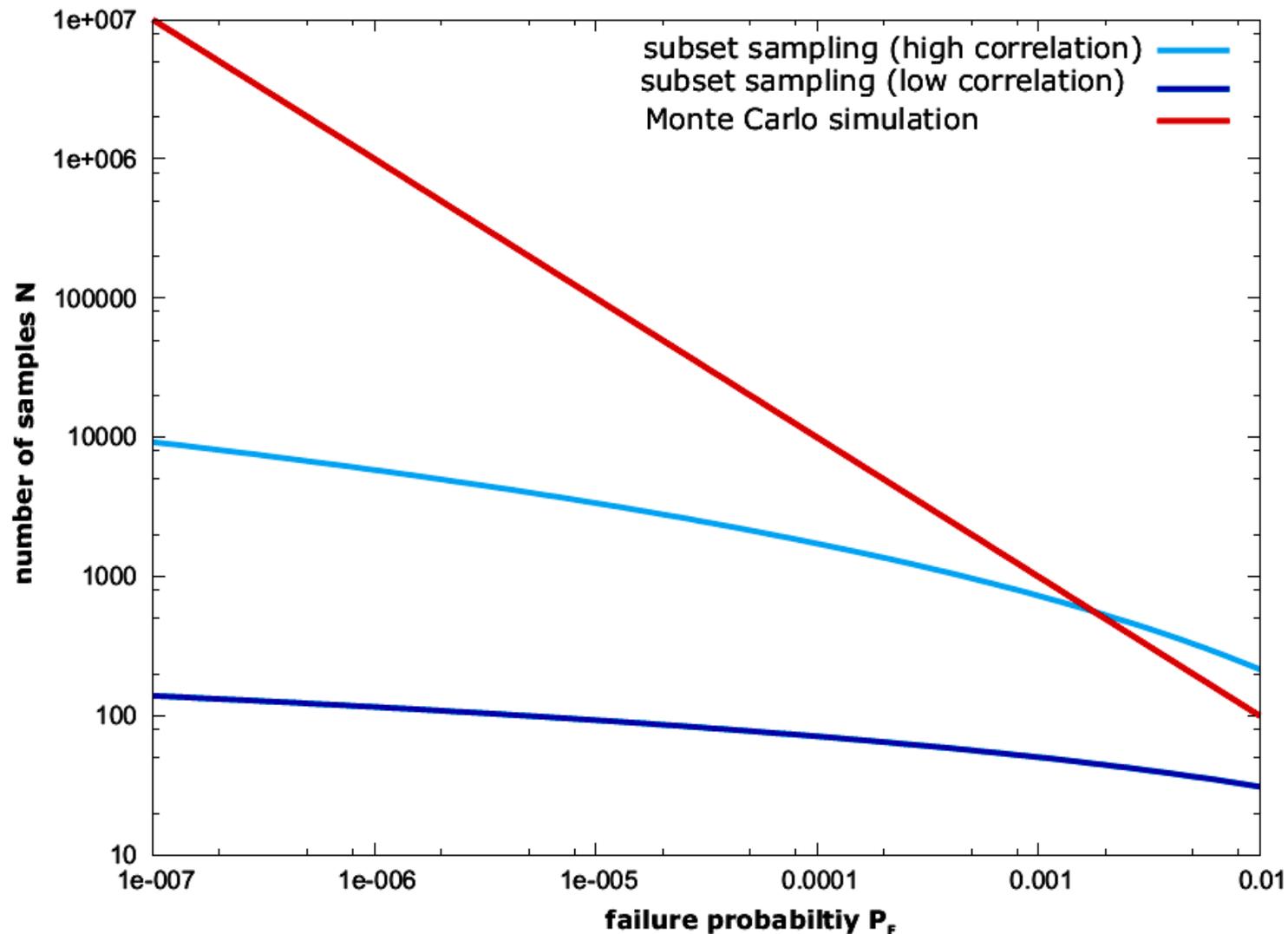
direct Monte Carlo simulation

$$N \approx 1 / P_F$$

# Subset Sampling

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

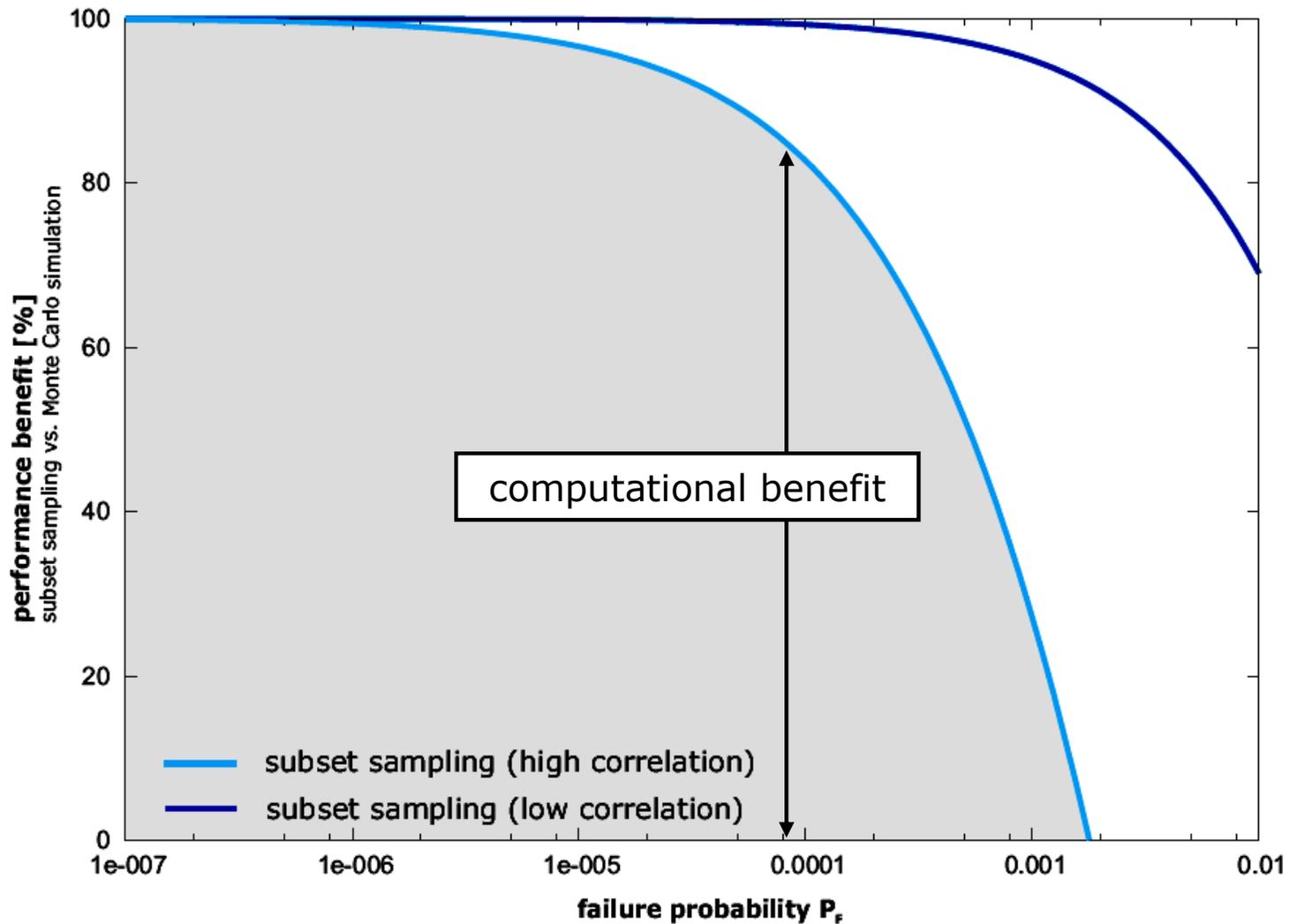
## Estimated numerical efficiency (SS vs. MCS)



# Subset Sampling

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Estimated numerical efficiency (SS vs. MCS)



# Subset Sampling – Benchmark Example

## Problem definition

- objective function

$$z(\underline{x}) = 8 \cdot \exp\left(-(\underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2)\right) + 2 \cdot \exp\left(-\left((\underline{x}_1 - 5)^2 + (\underline{x}_2 - 4)^2\right)\right) + 1 + \frac{\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2}{10}$$

- random variables

$$\underline{X}_1, \underline{X}_2 \sim N(2.7, 1.0)$$

- limit state function

$$g(\underline{x}) = 8.7 - z(\underline{x})$$

## Direct Monte Carlo simulation

- reference solution:

$$N = 10^6, \bar{P}_f = 1.38 \cdot 10^{-5}, s_{P_f} = 3.2 \cdot 10^{-6}$$

## Subset sampling

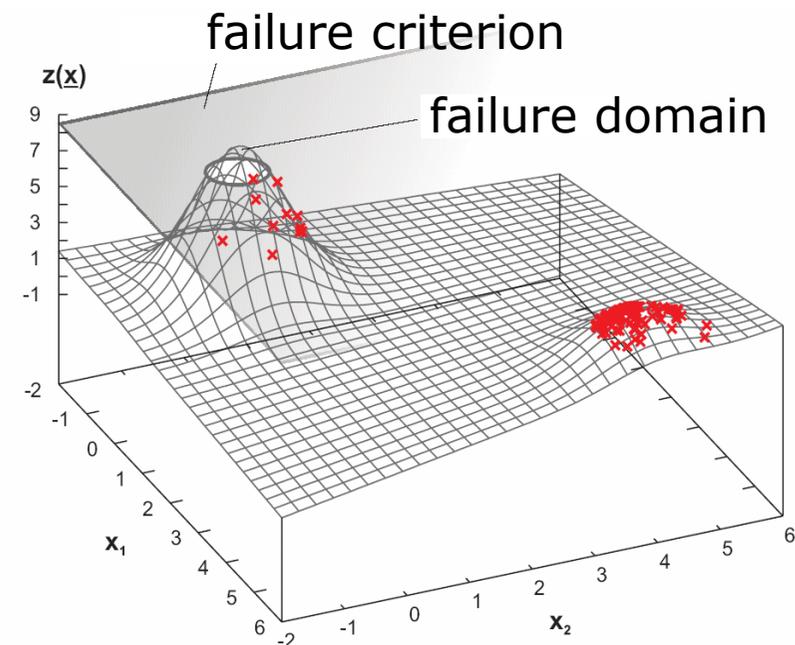
- adaptive specification of subsets

» target value  $P(F_{i+1} | F_i) = 0.1$

- failure domain attained with subset  $F_5$

$$N_t = 2.1 \cdot 10^4 \quad (N_1 = 10^3, N_{2,\dots,5} = 5 \cdot 10^3)$$

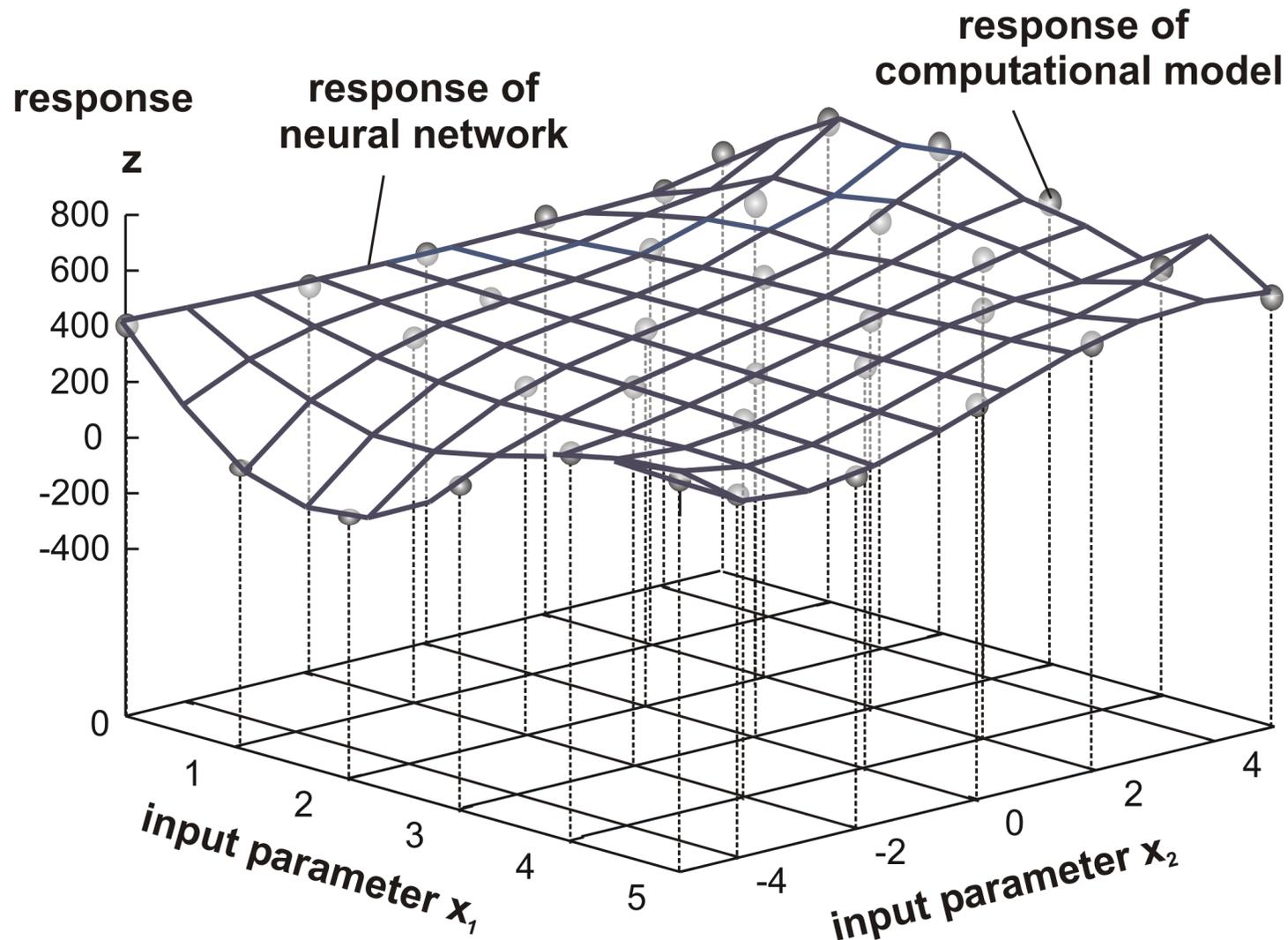
$$\bar{P}_f = 1.39 \cdot 10^{-5}, s_{P_f} = 1.3 \cdot 10^{-5}$$



# Meta Model Based Methodologies

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

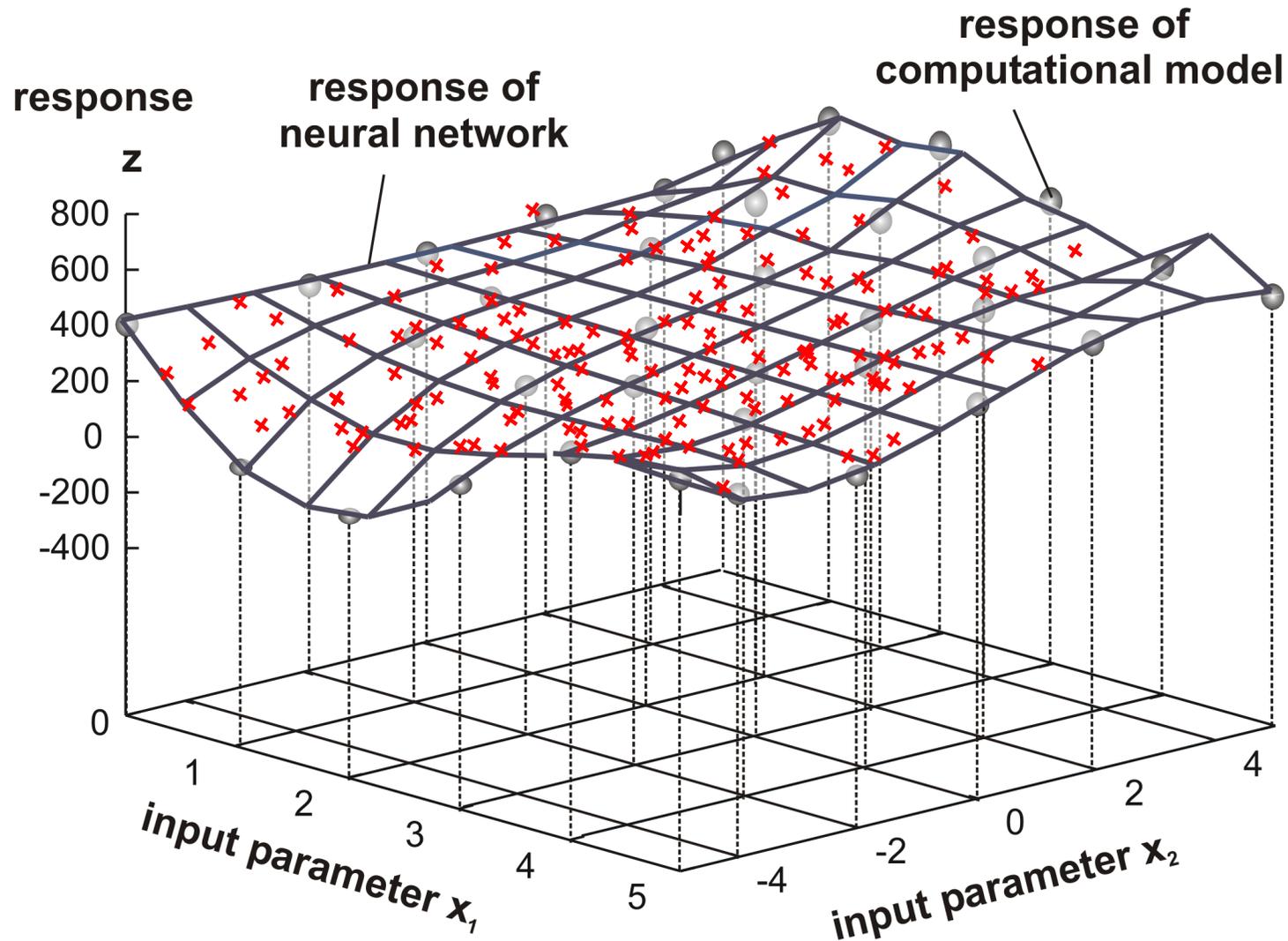
## Idea



# Meta Model Based Methodologies

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## MCS with Meta Model

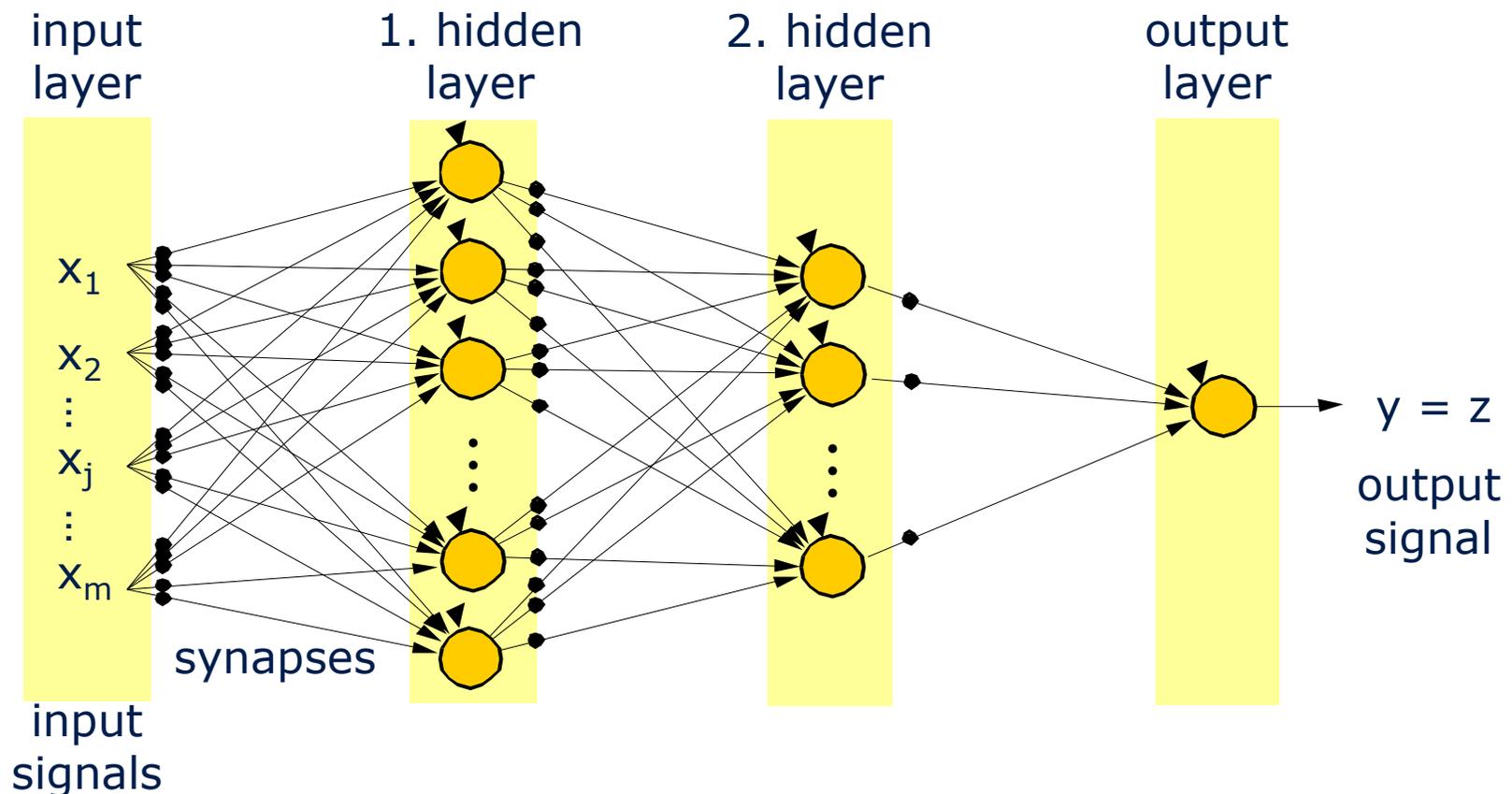


# Meta Model Based Methodologies – Neural Networks

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Feedforward Neural Network

- neurons organized in layers
- nonlinear approximation

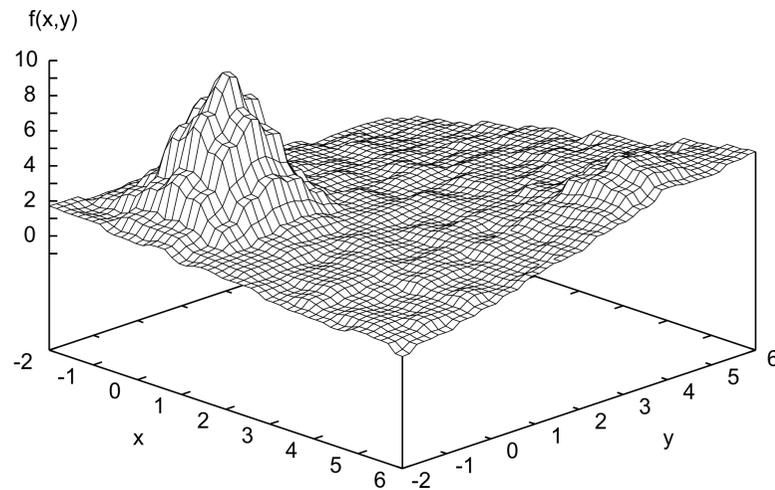


# Meta Model Based Methodologies – Neural Networks

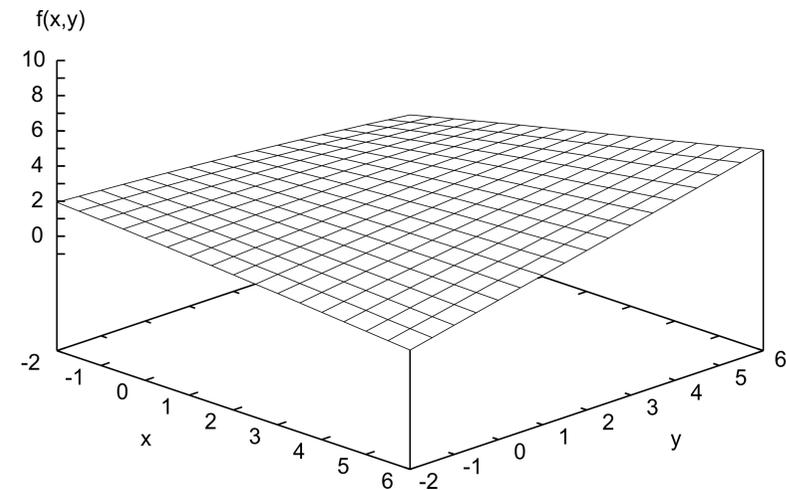
TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Approximation

**function to be approximated**



**response of neural network**



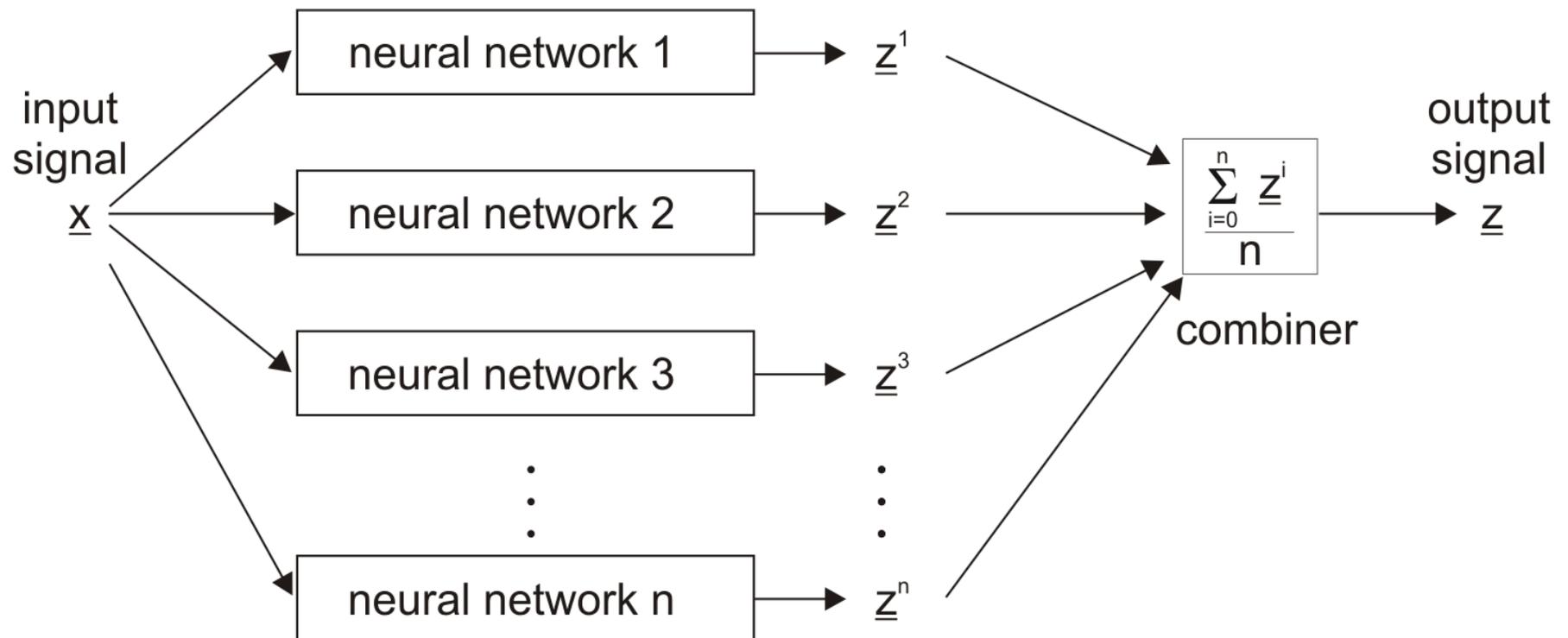
## Improvement of the approximation quality and numerical efficiency

- individual neural network
  - » optimum number of neurons and hidden layers
  - » feed-back connections: recurrent networks
  - » receptive fields
  - » locally weighted approximation
- combination of several neural networks
  - » averaged approximation: committee machine
  - » sequential approximation: network composite
  - » partitionwise approximation: patch network
- arbitrary combinations of individual measures

# Neural Networks - Committee Machine

## Committee Machine used by LS-Opt

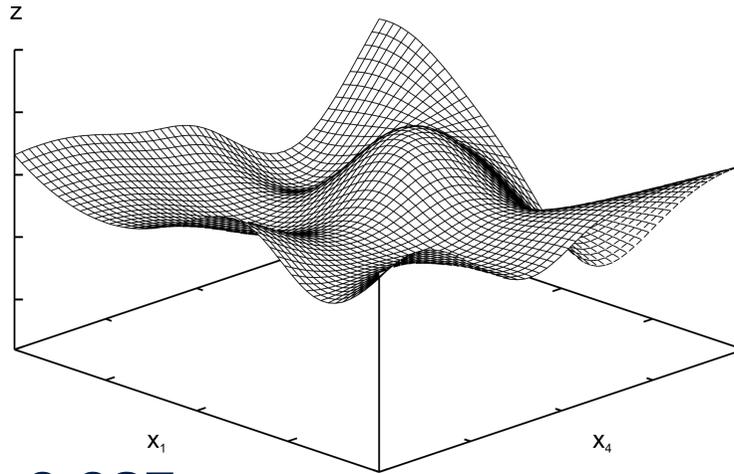
- parallel training of several neural networks



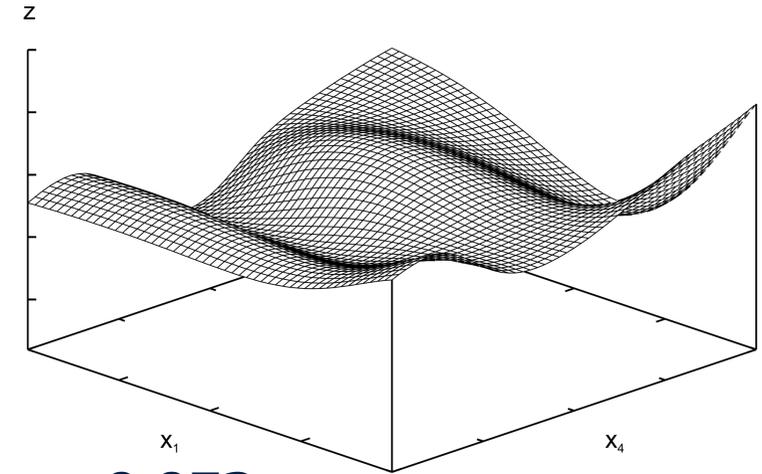
# Neural Networks - Committee Machine

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

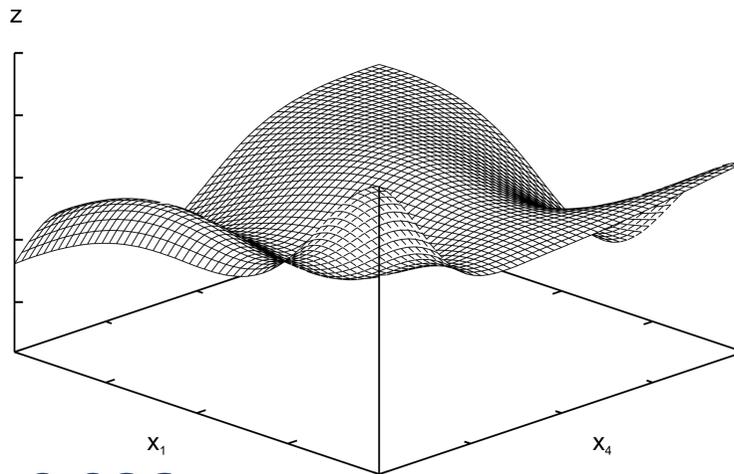
## Committee Members



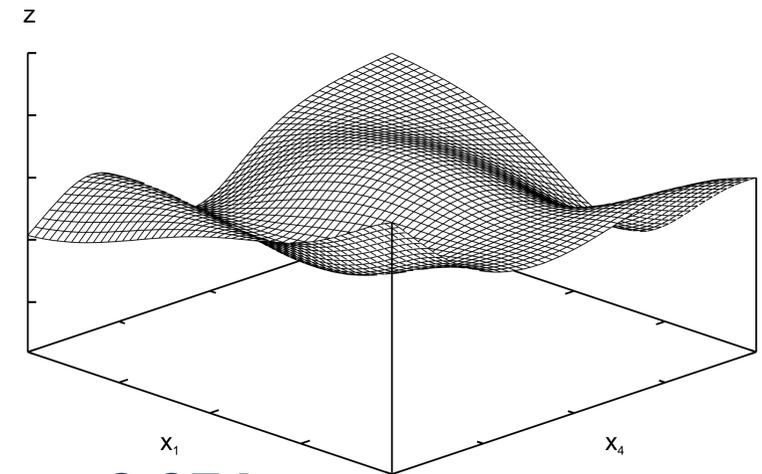
**$e_{\text{rms}}=0,087$**



**$e_{\text{rms}}=0,073$**



**$e_{\text{rms}}=0,086$**

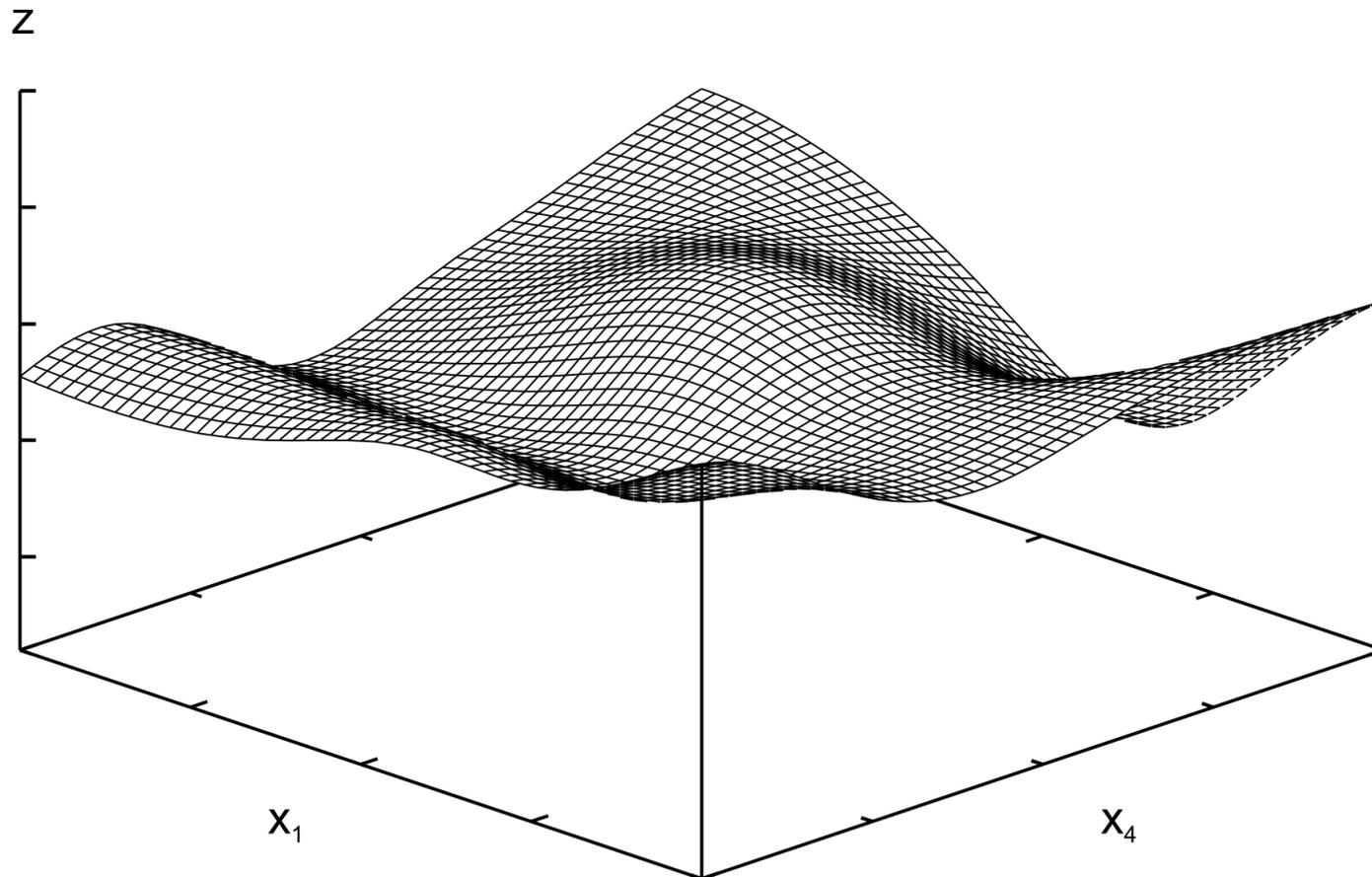


**$e_{\text{rms}}=0,074$**

# Neural Networks - Committee Machine

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Committee Machine



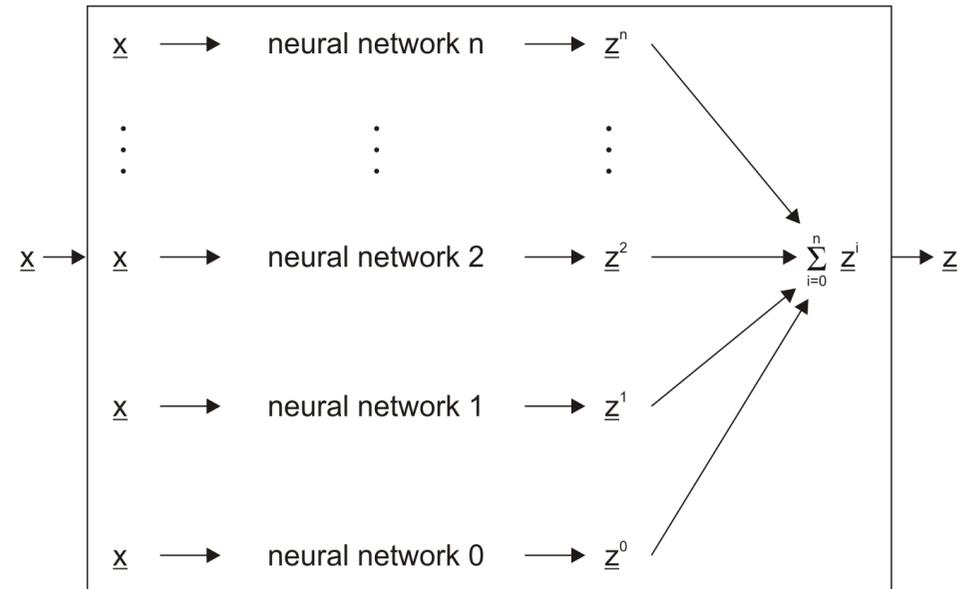
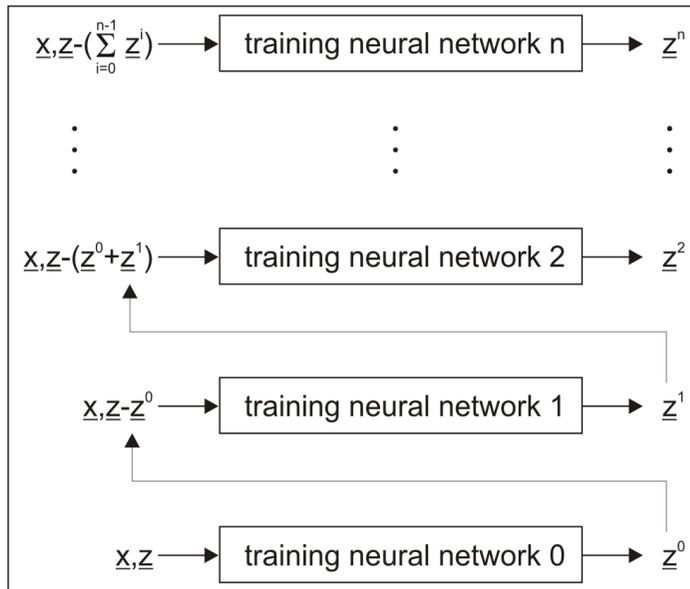
$$e_{\text{rms}} = 0,070$$

# Neural Networks - Composite

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Neural Network Composite

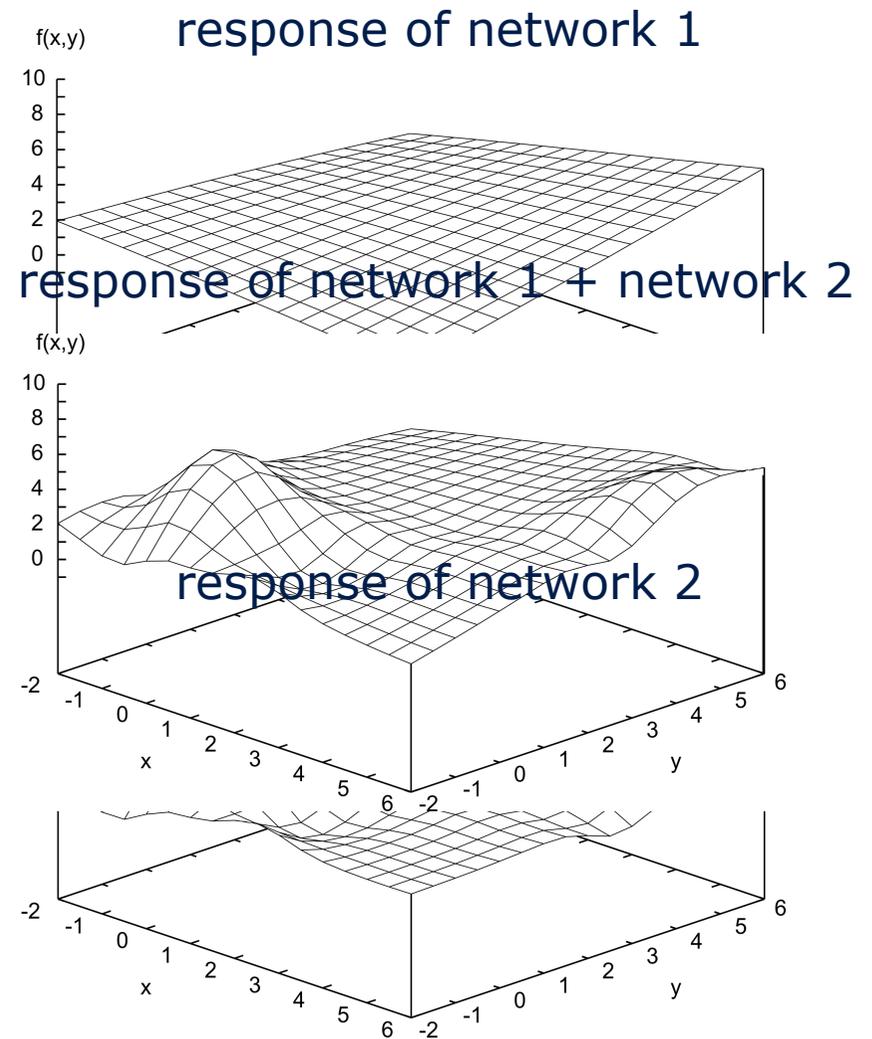
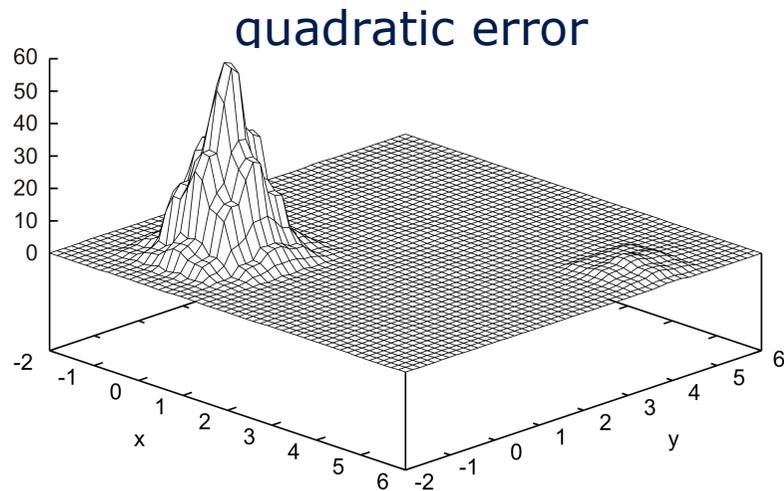
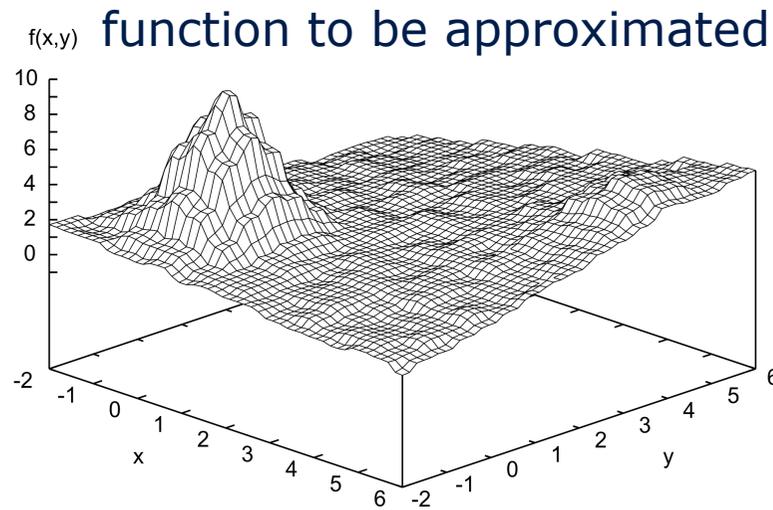
- sequential training of several neural networks
- approximation of respective error function
- evaluation of response surface using all trained neural networks



# Neural Networks - Composite

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

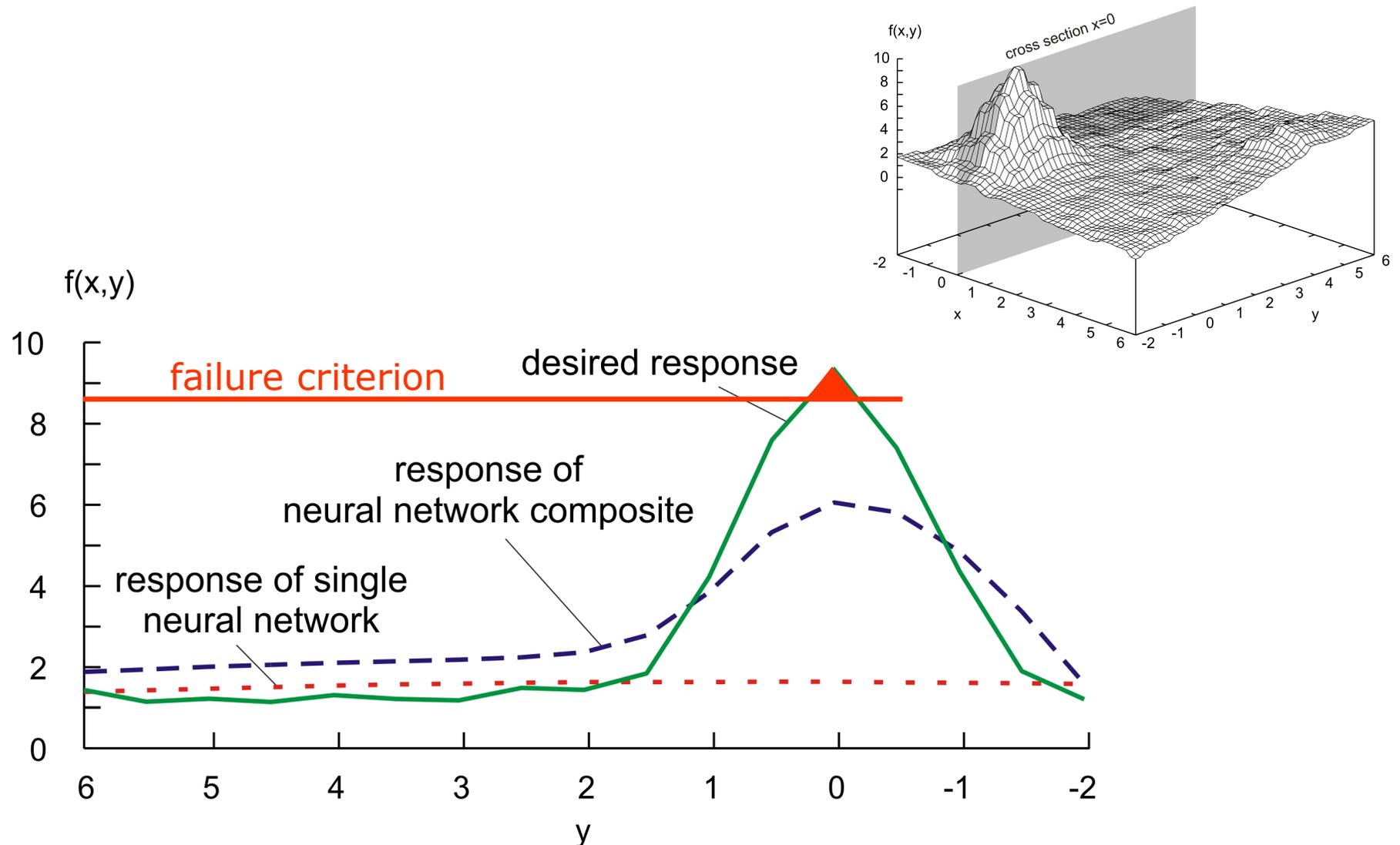
## Application of a Neural Network Composite



# Neural Networks - Composite

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Application of a Neural Network Composite

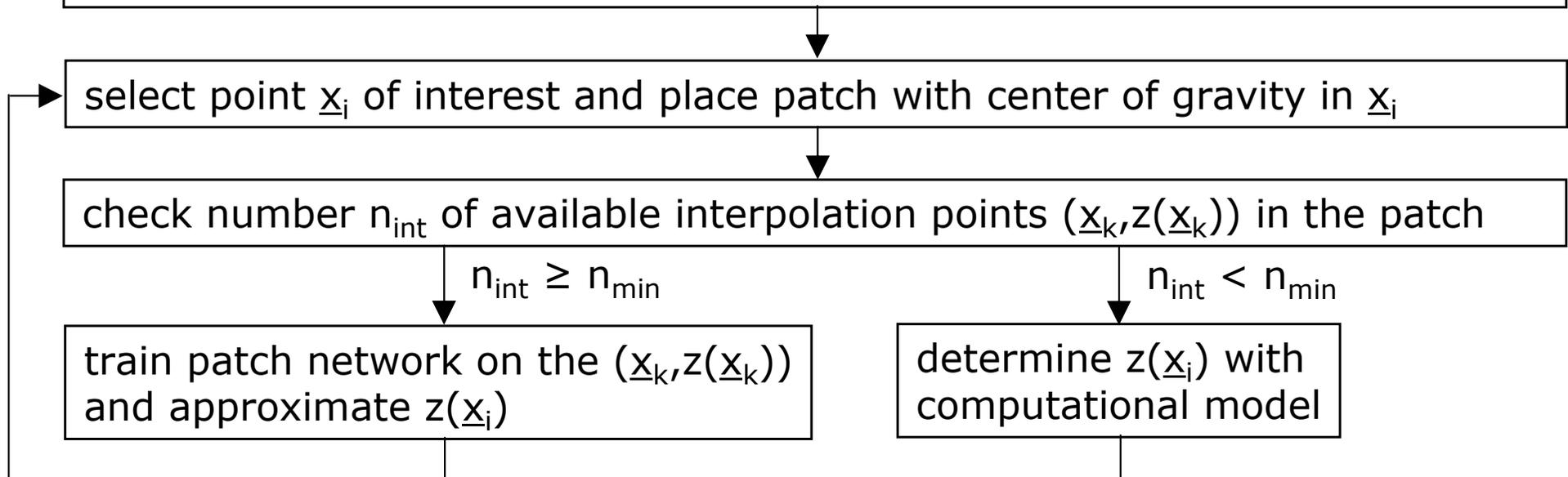


# Neural Networks – Patch Network

## Concept

- local approximation with high precision

define: » patch size  $p_j = a \cdot (\max_k \{x_{k,j}\} - \min_k \{x_{k,j}\})$  (e.g.,  $a=0.05$ )  
» minimum number  $n_{\min}$  of local interpolation points (e.g.,  $n_{\min}=5$ )  
» neural network architecture (e.g., 2–5–1)



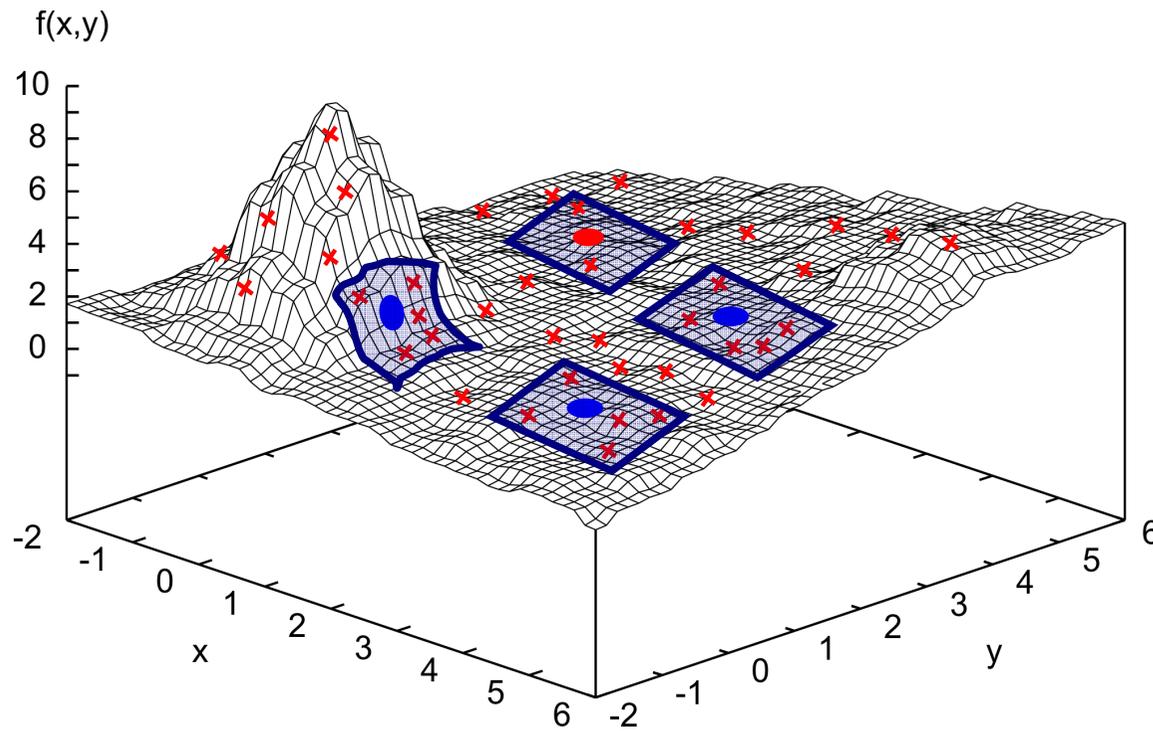
- response surface approximation as a set of individual network outputs

➔ high-quality representation of local function features, very small networks

# Neural Networks – Patch Network

TU Dresden - Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke

## Patch Network Approximation



# Neural Networks – Patch Network

## Direct MCS with neural network based RS approximation

- network approximation concepts
    - » single neural network
    - » network composite
    - » committee machine
    - » patch network
- (approximation quality locally not sufficient)
- ✗ computational model
  - patch network approximation

## Patch network

- parameter adjustment
  - » patch size:  $a=0.1$
  - $$p_j = a \cdot (\max_k \{x_{k,j}\} - \min_k \{x_{k,j}\})$$
  - » local interpolation points:  $n_{\min}=5$
  - » network architecture: 2-3-1

- failure probability estimation

$$N = 1000, \bar{P}_f = 1.25 \cdot 10^{-5}, s_{P_f} = 4.66 \cdot 10^{-6}$$

(reference solution:

$$\bar{P}_f = 1.38 \cdot 10^{-5}, s_{P_f} = 3.2 \cdot 10^{-6})$$

